第 37 講　ベクトル(1)

1　OA$=3$, OB$=2$, $\angle$AOB$=60^\circ$ の三角形 OAB の外接円の中心を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値を求めよ．

(3)　$\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

＜ Note ＞

2　三角形 ABC において，AB＝4，BC＝a，CA＝5 とする．また，△ABC の重心を G，内心を I，直線 AG と辺 BC の交点を M とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2)　∠A の二等分線と辺 BC の交点を N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行になるときの a の値を求めよ．また，そのときの △ABC の面積を求めよ．

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行になるときの a の値を求めよ．また，そのときの △ABC の面積を求めよ．

< Note >

3　三角形 OAB において，OA＝2，OB＝3，$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．線分 AB を 1：3 に内分する点を P とし，直線 OP に関して点 A と対称な点を Q とする．さらに，直線 OQ と直線 AB の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3)　三角形 OAQ の面積を求めよ．

＜ Note ＞

第 37 講　ベクトル(1)

△OAB において，OA＝2，OB＝3 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく．∠AOB の二等分線と線分 AB の交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D，直線 BD と OA の交点を H とする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{t}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a}-\vec{b}$ と表される．さらに $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，△OBH の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

＜ Note ＞

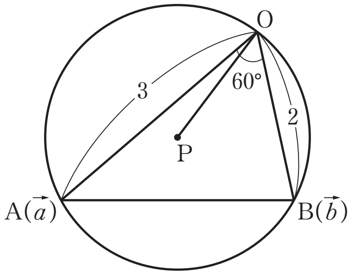
第37講　ベクトル(1)

1　OA＝3, OB＝2, ∠AOB＝60° の三角形OABの外接円の中心をPとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値を求めよ．

(3) $\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．



(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\times2\times\cos60^\circ=\mathbf{3}$

(2) AP＝OP　より　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}|$

両辺2乗して　$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

(3) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$\vec{a}\cdot\vec{p}=\dfrac{9}{2}$　より　$\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=9s+3t=\dfrac{9}{2}$

よって　$6s+2t=3$　……①

また，BP＝OP　より　$|\vec{p}-\vec{b}|=|\vec{p}|$

両辺2乗して　$|\vec{p}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{b}|^2=|\vec{p}|^2$　　よって　$\vec{b}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2=2$

$\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=3s+4t$　より　$3s+4t=2$　……②

①，②より　$s=\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{1}{6}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\vec{p}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}}$

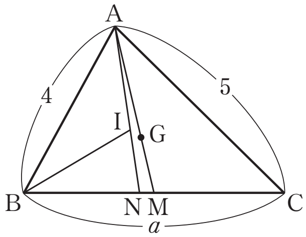
2　三角形ABCにおいて，AB＝4，BC＝a，CA＝5とする．また，△ABCの重心をG，内心をI，直線AGと辺BCの交点をMとする．

(1)　$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(2)　∠Aの二等分線と辺BCの交点をNとする．このとき，$\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{GI}$ が $\overrightarrow{AB}$ と平行になるときの a の値を求めよ．また，そのときの△ABCの面積を求めよ．

(4)　$\overrightarrow{GI}$ が $\overrightarrow{AC}$ と平行になるときの a の値を求めよ．また，そのときの△ABCの面積を求めよ．



(1)　$\boldsymbol{\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

(2)　角の二等分線の性質より　BN：NC＝AB：AC＝4：5

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AN}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}}$

また，AIは∠Aの二等分線ANと∠Bの二等分線の交点である．

したがって　AI：IN＝BA：BN＝BA：$\frac{4}{9}$BC＝4：$\frac{4}{9}a$＝9：a　より

$\overrightarrow{AI}=\frac{9}{9+a}\overrightarrow{AN}=\frac{9}{a+9}\left(\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{a+9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{a+9}\overrightarrow{AC}}$

(3)　$\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AG}=\left(\frac{5}{a+9}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{4}{a+9}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC}$　……①

$\overrightarrow{GI}$ が $\overrightarrow{AB}$ と平行になるのは，①の $\overrightarrow{AC}$ の係数が0のとき

よって　$\frac{4}{a+9}-\frac{1}{3}=0$　　$\frac{4}{a+9}=\frac{1}{3}$　　$12=a+9$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=3}$

このとき△ABCは∠ABC＝90°の直角三角形より

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=\boldsymbol{6}$

(4)　$\overrightarrow{GI}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$ となるのは，①の $\overrightarrow{AB}$ の係数が0のとき

よって　$\frac{5}{a+9}-\frac{1}{3}=0$　　$\frac{5}{a+9}=\frac{1}{3}$　　$15=a+9$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=6}$

このとき　$|\overrightarrow{BC}|=6$　より　$|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=6^2$

$|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2=36$　　$25-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+16=36$　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}$

よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2\cdot 5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5^2(2^2\cdot 4^2-1)}{2^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{64-1}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$

3　三角形 OAB において，OA＝2，OB＝3，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．線分 AB を 1：3 に内分する点を P とし，直線 OP に関して点 A と対称な点を Q とする．さらに，直線 OQ と直線 AB の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

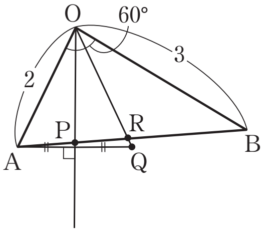
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3)　三角形 OAQ の面積を求めよ．

(1)　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=3$



AQ と OP の交点を M とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{4}t\vec{a}+\dfrac{1}{4}t\vec{b}$ とおくと

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\quad より$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\left(\frac{3}{4}t\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}\right)-\vec{a}=\left(\frac{3}{2}t-1\right)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

（解法１）　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　より　$(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

$$\left\{\left(\frac{3}{2}t-2\right)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}\right\}\cdot\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)=0$$

$$\{(3t-4)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(3\vec{a}+\vec{b})=0$$

$$3(3t-4)|\vec{a}|^2+(3t-4)\vec{a}\cdot\vec{b}+3t\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$$

$$3(3t-4)\cdot2^2+(3t-4)\cdot3+3t\cdot3+t\cdot3^2=0\qquad t=\frac{20}{21}$$

よって①より　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{10}{21}\vec{b}}$

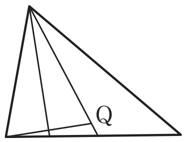
（解法２）　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$　より　$\left|\left(\dfrac{3}{2}t-1\right)\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}\right|^2=4$

$$\left(\frac{3}{2}t-1\right)^2|\vec{a}|^2+2\left(\frac{2}{3}t-1\right)\cdot\frac{1}{2}t\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}t^2|\vec{b}|^2=4$$

$$(3t-2)^2+\left(\frac{3}{2}t-1\right)t\cdot3+\frac{9}{4}t^2=4$$

$$\frac{63}{4}t^2-15t=0\qquad t\neq0 より\quad t=\frac{20}{21}$$

よって①より　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{10}{21}\vec{b}$



(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{7}k\vec{a}+\dfrac{10}{21}k\vec{b}$ とおくと，

3 点 A，R，B が一直線上より　$\dfrac{3}{7}k+\dfrac{10}{21}k=1$　　$k=\dfrac{21}{19}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{9}{19}\vec{a}+\dfrac{10}{19}\vec{b}$

よって　AR：RB＝10：9　　OQ：QR＝19：2

したがって　$\triangle\mathrm{OAQ}=\dfrac{19}{21}\triangle\mathrm{OAR}=\dfrac{19}{21}\cdot\dfrac{10}{19}\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{10}{21}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{7}}$

第 37 講　ベクトル(1)

△OAB において，OA＝2，OB＝3 とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく．∠AOB の二等分線と線分 AB の交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D，直線 BD と OA の交点を H とする．このとき $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{t}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a}-\vec{b}$ と表される．さらに $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$ となるとき，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，△OBH の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

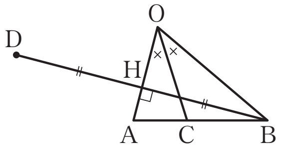
解答例

角の二等分線の性質より　AC：CB＝OA：OB＝2：3　　よって　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{OH}=k\vec{a}$ とおくと，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　つまり　$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0$　　$(k\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

$k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　$4k-t=0$　　よって　$k=\dfrac{t}{4}$ より　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{t}{4}\vec{a}$

また，$\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2}=\overrightarrow{OH}$ より



$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=2\cdot\dfrac{t}{4}\vec{a}-\vec{b}=\dfrac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}$

さらに　$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$ となるとき　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$

つまり　$\left(\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}\right)\cdot\left(\dfrac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=0$　　$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(t\vec{a}-2\vec{b})=0$

$3t|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2t\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2=0$　　$12t-6t+2t^2-36=0$

$t^2+3t-18=0$　　$(t+6)(t-3)=0$　　$t=3,\ -6$

$t=3$ のとき　$\cos\angle AOB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{2\cdot3}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$

$t=-6$ のとき　$\cos\angle AOB=\dfrac{-6}{2\cdot3}=-1$　　よって　$\angle AOB=\pi$ より　不適

また $t=3$ のとき　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$ より　$\triangle OBH=\dfrac{3}{4}\triangle OAB=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$